KTH TEORETISK FYSIK

TENTAMEN KVANTFYSIK SI1151
Torsdag 131031 kl. 14.00-19.00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	Teoretisk fysiks formelsamling, BETA, miniräknare
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 5537 8475

1. En partikel representeras av vågfunktionen

$$\Psi(x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & \text{för } |x| < a \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

(a) Bestäm $A, \langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle$.
(b) Bestäm sannolikheten att en positionsmätning hittar partikeln i $x > a/2$.

2. En spinn 1/2 partikel befinner sig i ett konstant, likformigt magnetfält riktat i y-riktningen: $\mathbf{B} = B\hat{e}_y$, där B är en konstant. Hamiltonianen ges av $H = \omega_0 S_y$ med $\omega_0 = eB/m$. Vid tiden $t = 0$ är partikeln i spinn upp tillståndet $|+\rangle$. Bestäm sannolikheten att hitta partikeln i spinn ner tillståndet $|-\rangle$ vid tiden t.

3. Ett tvåpartikelsystem består av två identiska spinn 0 bosoner i en endimensionell oändlig lådpotential som ges av

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 < x < L \\ \infty & \text{för övrigt} \end{cases}$$

(a) Bestäm grundtillståndet och de två första exciterade tillstånden.

(b) Antag att bosonerna växelverkar med varandra med en potential som ges av

$$H' = V_0 L \delta(x_1 - x_2)$$

där V_0 är en konstant (s.k. kontaktväxelverkan). Behandla växelverkan som en störning och beräkna första ordningens korrektion till grundtillståndets energi.

VÄND!

4. Deuterium är en väteisotop med en proton och en neutron i kärnan. Deuteriumkärnan har spinn 1 och gyromagnetisk konstant $g_D = 0.857$. Bestäm uppsplittringen av grundtillståndsenergin på grund av hyperfin växelverkan. Svaret ska ges i MHz. I vanligt väte ges hyperfin växelverkan av

$$H' = \frac{A}{\hbar^2}\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}$$

där I är kärnspinnet, S elektronspinnet, $A = \frac{2\mu_0}{3} g_e \mu_B g_p \mu_N |\Psi_{1s}(0)|^2 = 1420.4$ MHz, och $g_e = 2.00, g_p = 5.59$.

5. En endimensionell harmonisk oscillator är i grundtillståndet vid tiden $t = -\infty$. Oscillatorn utsätts för en liten störning av formen

$$H'(t) = -eExe^{-t^2/\tau^2}$$

där e, E, τ är konstanter. Bestäm med första ordningens störningsteori sannolikheten att hitta oscillatorn i ett exciterat tillstånd vid tiden $t = \infty$.

LYCKA TILL!

Energinivåer och egenfunktioner för en partikel i en oändlig lådpotential:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\ ,\ \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin k_n x\ ,\ k_n = \frac{n\pi}{L}\ ,\ n = 1,2,3,...$$

Spinn 1/2 operatorer och egentillstånd:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},\ |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Tidsberoende störningsräkning:

$$c_f(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \langle f|H'(t')|i\rangle e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt'$$

Lösning till tentamen i Kvantfysik 131031

1. (a) Normering:

$$\int |\Psi|^2 dx = |A|^2 \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2 dx = 2|A|^2 a^5 \int_0^1 \underbrace{(1-x^2)^2}_{=1-2x^2+x^4} dx$$

$$= 2|A|^2 a^5 (1 - 2/3 + 1/5) = \frac{16}{15}|A|^2 a^5 = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}$$

Positionsväntevärde: x udda, $|\Psi(x)|^2$ jämn ger

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x)|^2 dx = 0$$

Väntevärde av x^2:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\Psi(x)|^2 dx = 2|A|^2 a^7 \int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6) dx$$

$$= 2\frac{15}{16a^5} a^7 (1/3 - 2/5 + 1/7) = \frac{15}{8}\frac{8}{105} a^2 = \frac{1}{7} a^2$$

Rörelsemängdens väntevärde: $\Psi(x)$ jämn och $d\Psi(x)/dx$ udda ger

$$\langle p \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} dx = 0$$

Väntevärde av p^2:

$$\langle p^2 \rangle = -2\hbar^2 \frac{15}{16a^5} a^3 \int_0^1 (1-x^2) \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}(1-x^2)}_{=-2} dx = \hbar^2 \frac{15}{4a^2}(1 - 1/3) = \frac{5}{2}\frac{\hbar^2}{a^2}$$

(Notera att osäkerhetsrelationen är uppfylld: $\Delta x \Delta p = (a/\sqrt{7})(\sqrt{5/2}\hbar/a) = 0.577\hbar > \hbar/2$.)

(b) Sannolikhet att hitta partikeln i $x > a/2$:

$$P(x > a/2) = \frac{15}{16a^5} \int_{a/2}^{a} (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{15}{16a^5} a^5 \int_{1/2}^{1} (1 - 2x^2 + x^4) dx$$

$$= \frac{15}{16}[(1 - 1/2) - 2(1 - 1/8)/3 + (1 - 1/32)/5] = \frac{53}{512} \approx 0.10$$

2. Det finns flera möjliga metoder.

Metod 1: Schrödinger-ekvationen ger

$$H|\Psi\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = i\hbar\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix}$$

Initialvillkor:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t/2 \\ \sin\omega_0 t/2 \end{pmatrix}$$

Sannolikheten att hitta spinn ner vid tiden t:

$$P_-(t) = |\langle -|\Psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\omega_0 t/2$$

Metod 2: Använd S_y-basen för att skriva tillståndet vid tiden $t=0$:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle = |+\rangle_{yy}\langle +|+\rangle + |-\rangle_{yy}\langle -|+\rangle = \frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}}$$

Med $E_\pm = \pm\hbar\omega_0/2$ blir tillståndet vid tiden t

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{|+\rangle_y e^{-i\omega_0 t/2} + |-\rangle_y e^{i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} = \frac{|+\rangle + i|-\rangle}{2}e^{-i\omega_0 t/2} + \frac{|+\rangle - i|-\rangle}{2}e^{i\omega_0 t/2}$$

$$= \cos(\omega_0 t/2)|+\rangle + \sin(\omega_0 t/2)|-\rangle = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t/2 \\ \sin\omega_0 t/2 \end{pmatrix}$$

Sannolikhet att hitta $S_z = -\hbar/2$ vid tiden t blir nu samma som ovan:

$$P_-(t) = |\langle -|\Psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\omega_0 t/2$$

3. (a) Bosoner har tillstånd som är symmetriska under utbyte av partiklar. Spinntillståndet $|S_1 S_2\rangle = |0,0\rangle$ är symmetriskt under utbyte av partiklarna. Därför måste den rumsliga delen av tillståndet också vara symmetriskt under utbyte, för att det totala tillståndet ska bli symmetriskt. De rumsliga vågfunktionerna är därför enligt följande:

Grundtillståndet: $\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)$. Energi $2E_1$ (E_n = energi för en partikel i lådpotential)

Första exciterade tillståndet: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2))$. Energi $E_1 + E_2 = 5E_1$

Andra exciterade tillståndet: $\psi_2(x_1)\psi_2(x_2)$. Energi $2E_2 = 8E_1$

(b) Korrektionen till grundtillståndsenergin blir

$$E_1^1 = \langle H' \rangle = \int dx_1 \int dx_2 \psi_1^*(x_1)\psi_1^*(x_2) V_0 L \delta(x_1 - x_2)\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)$$

Använd nu relationen $\int dx_2 f(x_1, x_2)\delta(x_1 - x_2) = f(x_1, x_1)$:

$$\begin{aligned}
E_1^1 &= V_0 L \int dx \psi_1^*(x)\psi_1^*(x)\psi_1(x)\psi_1(x) \\
&= V_0 L \int dx |\psi_1(x)|^4 \\
&= V_0 L \left(\frac{2}{L}\right)^2 \int_0^L \sin^4 \pi x/L dx \\
&= V_0 L \left(\frac{2}{L}\right)^2 L \int_0^1 \sin^4 \pi x dx \\
&= 4V_0 \int_0^1 \left(\frac{1 - \cos 2\pi x}{2}\right)^2 dx \\
&= V_0 \int_0^1 (1 - 2\cos 2\pi x + \cos^2 2\pi x) dx \\
&= V_0(1 - 0 + 1/2) = \frac{3}{2} V_0
\end{aligned}$$

4. Använd kopplad bas. Med totala rörelsemängdsmomentet $\mathbf{F} = \mathbf{I}+\mathbf{S}$ blir Hamiltonianen

$$H = \frac{A}{\hbar^2}\mathbf{I}\cdot\mathbf{S} = \frac{A}{2\hbar^2}(F^2 - I^2 - S^2)$$

För Deuterium är $I = 1, S = \frac{1}{2} \Rightarrow F = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Störningen är diagonal i den kopplade basen och första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin ges av diagonalelementen. Det två möjliga värdena på F ger energikorrektionerna:

$$E_1^1 = \langle ISFM_F|H'|ISFM_F\rangle = \frac{A}{2}[F(F+1) - I(I+1) - S(S+1)]$$
$$= \begin{cases} \frac{A}{2}\left[\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - 2 - \frac{3}{4}\right] = \frac{A}{2} & \text{för } F = 3/2 \\ \frac{A}{2}\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - 2 - \frac{3}{4}\right] = -A & \text{för } F = 1/2 \end{cases}$$

vilket ger energisplittringen mellan nivåerna

$$\Delta E_1^1 = \frac{3A}{2}$$

Kopplingskonstanten A_D för deuterium fås ur vätekonstanten $A_H = \frac{2\mu_0}{3} g_e \mu_B g_p \mu_N |\Psi_{1s}(0)|^2 =$ 1420.4 MHz, genom att byta protonens g_p-faktor mot deutronens g_D-faktor:

$$A_D = \frac{g_D}{g_p} A_H = \frac{0.857}{5.59} 1420.4 = 217.8 \text{ MHz}$$

Hyperfinsplittringen av deuteriums grundtillstånd blir därför

$$\Delta E_1^1 = \frac{3}{2} 217.8 = 326.6 \text{ MHz}$$

Detta stämmer utmärkt med experiment och används i radioastronomi. Se:

http://iopscience.iop.org/1538-3881/133/4/1625

http://www.haystack.edu/ast/arrays/deut/index.html

5. Tidsberoende störningsräkning ger koefficienten för n:te tillståndet:

$$
\begin{aligned}
c_n(t \to \infty) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n | H'(t') | 0 \rangle e^{i(E_n - E_0)t'/\hbar} dt' \\
&= \frac{-eE}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle n | x | 0 \rangle e^{-t'^2/\tau^2} e^{i(E_n - E_0)t'/\hbar} dt' \\
&= \frac{-eE}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle n | a^\dagger + a | 0 \rangle}_{=\delta_{n,1}} e^{-t'^2/\tau^2} e^{in\omega t'} dt'
\end{aligned}
$$

Alltså sker övergångar bara till första exciterade nivån $n = 1$ i första ordningens störningsräkning. (Med andra ordningens störningsräkning fås övergång till andra nivån, osv.) För $n = 1$ blir

$$
c_1 = \frac{-eE}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t'^2/\tau^2} e^{i\omega t'} dt'}_{=I}
$$

Denna Fourier-transform kan slås upp i BETA. Alternativt mha kvadratkomplettering:

$$
-t'^2/\tau^2 + i\omega t' = -(t'/\tau - i\omega\tau/2)^2 - \omega^2\tau^2/4
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t'/\tau - i\omega\tau/2)^2} e^{-\omega^2\tau^2/4} dt' \\
&= e^{-\omega^2\tau^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t'/\tau - i\omega\tau/2)^2} dt' \\
& [s = t'/\tau - i\omega\tau/2] \\
&= \tau e^{-\omega^2\tau^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \\
&= \sqrt{\pi}\tau e^{-\omega^2\tau^2/4}
\end{aligned}
$$

Sätt ihop:

$$
c_1 = \frac{-eE}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\pi}\tau e^{-\omega^2\tau^2/4}
$$

Sannolikheten att hitta partikeln i ett exciterat tillstånd blir

$$
P_1 = |c_1|^2 = (eE\tau)^2 \frac{\pi}{2m\hbar\omega} e^{-\omega^2\tau^2/2}
$$

Kommentar: Eftersom $\langle 0 | x | 0 \rangle = 0$ så blir $c_0^1 = 0$ (superscript 1 utelämnas i formlerna ovan). Detta är första ordningens korrektion till koefficienten, och koefficienten själv blir $c_0 = 1$, vilket föreslår att $P_0(t = \infty) = 1$, dvs excitationssannolikheten är noll. Detta är inte korrekt. När störningen slår på korrektioner till koefficienterna är dessa inte längre normerade, och normeringen måste tas med i sannolikheten att stanna i grundtillståndet:

$$
P_0(t = \infty) = \frac{|c_0|^2}{|c_0|^2 + |c_1|^2} = \frac{1}{1 + |c_1|^2} \approx 1 - |c_1|^2
$$

till första ordningen. Detta stämmer med resultatet ovan. Excitationssannolikheten påverkas inte till första ordningen av denna omnormering:

$$
P_1(t = \infty) = \frac{|c_1|^2}{1 + |c_1|^2} \approx |c_1|^2
$$

Notera att första ordningens sannolikheter är korrekt normerade: $P_0(t = \infty) + P_1(t = \infty) = 1$.